

**МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ**

**ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ**

**«КАРАЧАЕВО-ЧЕРКЕССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ  
УНИВЕРСИТЕТ ИМЕНИ У.Д. АЛИЕВА»**

Физико-математический факультет

Кафедра информатики и вычислительной математики

УТВЕРЖДАЮ

И. о. проректора по УР

М. Х. Чанкаев

«30» апреля 2025 г., протокол № 8

**ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

**Приближенные методы решения интегральных и  
дифференциальных уравнений**

*(наименование дисциплины (модуля))*

Направление подготовки

***01.03.02 Прикладная математика и информатика***

*(шифр, название направления)*

направленность (профиль):

***«Системное программирование и  
компьютерные технологии»***

Квалификация выпускника

***бакалавр***

Форма обучения

***Очная***

**Год начала подготовки 2025**

Карачаевск, 2025

## 1. Компетенции по дисциплине «Приближенные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений»

Код компетенций	Содержание компетенции в соответствии с ФГОС ВО/ ОП ВО	Индикаторы достижения компетенций
УК-1, ПК-2	Способен осуществлять поиск, критический анализ и синтез информации, применять системный подход для решения поставленных задач	УК-1.1. Знает принципы сбора, отбора и обобщения информации УК-1.2. Умеет соотносить разнородные явления и систематизировать их в рамках избранных видов профессиональной деятельности УК-1.3. Владеет навыками работы с информационными объектами и сетью Интернет, опытом научного поиска, опытом библиографического поиска
ПК-2	Способен понимать, совершенствовать и применять современный математический аппарат	ПК-2.1. Знает принципы построения и методы исследования математических моделей объектов различной природы. ПК-2.2. Умеет использовать и модифицировать существующие математические методы для решения прикладных задач. ПК-2.3. Владеет навыками использования математического аппарата при решении прикладных задач.

## 2. Тестовый материал для диагностики индикаторов оценивания сформированности компетенций по дисциплине «Приближенные методы решения интегральных и дифференциальных уравнений»

Номер задания	Правильный ответ	Содержание вопроса	Компетенция
<b>Задания закрытого типа с одним правильным ответом</b>			
1.		<p><b>Какой тип уравнения представляет собой интегральное уравнение Фредгольма 2-го рода?</b></p> <p>a) <math>u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy</math></p> <p>b) <math>u(x) = \int_a^b K(x, y)u(y)dy</math></p> <p>c) <math>u(x) = f(x) + K(x)u(x)</math></p>	УК-1, ПК-2

		d) $u(x) = \int_a^b f(y)K(x,y)u(y)dy$	
2.		<b>Какой метод используется для нахождения решения интегрального уравнения Фредгольма 2-го рода?</b> а) Метод конечных разностей б) Метод последовательных приближений в) Метод интегральных преобразований г) Метод вариаций постоянных	УК-1, ПК-2
3.		<b>Какое свойство имеет ядро <math>K(x,y)</math> для обеспечения сходимости метода последовательных приближений?</b> а) Должно быть неограниченным б) Должно быть непрерывным и ограниченным в) Должно быть линейным г) Должно быть симметричным	УК-1, ПК-2
4.		<b>Какой из следующих методов можно использовать для решения интегральных уравнений Вольтерра 2-го рода?</b> а) Метод конечных элементов б) Метод последовательных приближений в) Метод Лапласа г) Метод разностных уравнений	УК-1, ПК-2
5.		<b>Что такое задача Штурма–Лиувилля?</b> а) Дифференциальное уравнение с начальными условиями б) Дифференциальное уравнение с краевыми условиями в) Система алгебраических уравнений г) Интегральное уравнение	УК-1, ПК-2
6.		<b>Как можно построить резольвенту уравнения Фредгольма 2-го рода?</b> а) Через решение однородного уравнения б) Через итерационную схему, используя итерированные ядра в) Через численные методы г) Через преобразование Лапласа	УК-1, ПК-2
<b>Задания закрытого типа с несколькими правильными ответами</b>			
7.		<b>Какое из следующих утверждений верно относительно метода последовательных приближений?</b> а) Метод всегда сходится для любых ядер	УК-1, ПК-2

		b) Метод может не сходиться для некоторых ядер c) Метод требует наличия единственного решения d) Метод работает только для линейных интегральных уравнений	
8.		<b>Какое из следующих уравнений является уравнением Штурма–Лиувилля?</b> a) $y''+p(x)y'+q(x)y=0$ b) $y''+y=0$ c) $y'+a(x)y=f(x)$ d) $y''+\lambda y=0$	УК-1, ПК-2
9.		<b>Какова роль резольвенты уравнения Фредгольма 2-го рода?</b> a) Она помогает находить решение уравнения. b) Она является решением однородного уравнения. c) Она используется для преобразования уравнения в другую форму. d) Она может быть выражена через итерированные ядра.	УК-1, ПК-2
10.		<b>Какие из следующих уравнений являются интегральными уравнениями Вольтерра 2-го рода с вырожденным ядром?</b> a) $u(x) = f(x) + \int_a^x K(x, y)u(y)dy$ b) $u(x) = \int_a^x K(x, y)u(y)dy$ c) $u(x) = f(x) + \int_x^b K(x, y)u(y)dy$ d) $u(x) = f(x) + \int_a^b K(x, y)u(y)dy$	УК-1, ПК-2
11.		<b>Что такое функция Грина в контексте задачи Штурма–Лиувилля? (Выберите все подходящие варианты)</b> a) Решение однородного уравнения b) Функция, которая используется для построения решения не однородного уравнения c) Функция, зависящая от краевых условий d) Константа интегрирования	УК-1, ПК-2
12.		<b>Какие уравнения можно решить с помощью резольвенты закрытого типа?</b>	УК-1, ПК-2

		a) Уравнения Фредгольма 1-го рода b) Уравнения Вольтерра 1-го рода c) Уравнения Фредгольма 2-го рода d) Уравнения Вольтерра 2-го рода											
Задания закрытого типа. Задачи на соответствие													
13.		<b>Сопоставьте термины с их определениями:</b> <table><tr><th>Термин</th><th>Определение</th></tr><tr><td>1. Уравнение Фредгольма</td><td>a. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом</td></tr><tr><td>2. Уравнение Вольтерра 2-го рода</td><td>b. Интегральное уравнение с фиксированным верхним пределом</td></tr><tr><td>3. Ядро уравнения</td><td>c. Функция, определяющая взаимодействие переменных</td></tr><tr><td>4. Решение уравнения</td><td>d. Функция, удовлетворяющая интегральному уравнению</td></tr></table>	Термин	Определение	1. Уравнение Фредгольма	a. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом	2. Уравнение Вольтерра 2-го рода	b. Интегральное уравнение с фиксированным верхним пределом	3. Ядро уравнения	c. Функция, определяющая взаимодействие переменных	4. Решение уравнения	d. Функция, удовлетворяющая интегральному уравнению	УК-1, ПК-2
Термин	Определение												
1. Уравнение Фредгольма	a. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом												
2. Уравнение Вольтерра 2-го рода	b. Интегральное уравнение с фиксированным верхним пределом												
3. Ядро уравнения	c. Функция, определяющая взаимодействие переменных												
4. Решение уравнения	d. Функция, удовлетворяющая интегральному уравнению												
14.		<b>Сопоставьте термины с их определениями:</b> <table><tr><th>Термин</th><th>Определения</th></tr><tr><td>1. Ядро уравнения Фредгольма</td><td>a. <math>K(x,t)</math> с фиксированным <math>t</math></td></tr><tr><td>2. Ядро уравнения Вольтерра</td><td>b. <math>K(x,t)</math> с переменным <math>t</math></td></tr><tr><td>3. Применение уравнений Фредгольма</td><td>c. Моделирование процессов в физике</td></tr><tr><td>4. Применение уравнений Вольтерра</td><td>d. Описание временных зависимостей</td></tr></table>	Термин	Определения	1. Ядро уравнения Фредгольма	a. $K(x,t)$ с фиксированным $t$	2. Ядро уравнения Вольтерра	b. $K(x,t)$ с переменным $t$	3. Применение уравнений Фредгольма	c. Моделирование процессов в физике	4. Применение уравнений Вольтерра	d. Описание временных зависимостей	УК-1, ПК-2
Термин	Определения												
1. Ядро уравнения Фредгольма	a. $K(x,t)$ с фиксированным $t$												
2. Ядро уравнения Вольтерра	b. $K(x,t)$ с переменным $t$												
3. Применение уравнений Фредгольма	c. Моделирование процессов в физике												
4. Применение уравнений Вольтерра	d. Описание временных зависимостей												
15.		<b>Сопоставьте термины с их определениями:</b> <table><tr><th>Термин</th><th>Определения</th></tr><tr><td>1. Линейное интегральное уравнение</td><td>a. Уравнение, в котором ядро и функции линейны</td></tr><tr><td>2. Нелинейное интегральное уравнение</td><td>b. Уравнение, содержащее произведения функций</td></tr><tr><td>3. Применение метода итераций</td><td>c. Специальный случай ядра в уравнении Фредгольма</td></tr><tr><td>4. Ядро Грина</td><td>d. Для нахождения решений уравнений</td></tr></table>	Термин	Определения	1. Линейное интегральное уравнение	a. Уравнение, в котором ядро и функции линейны	2. Нелинейное интегральное уравнение	b. Уравнение, содержащее произведения функций	3. Применение метода итераций	c. Специальный случай ядра в уравнении Фредгольма	4. Ядро Грина	d. Для нахождения решений уравнений	УК-1, ПК-2
Термин	Определения												
1. Линейное интегральное уравнение	a. Уравнение, в котором ядро и функции линейны												
2. Нелинейное интегральное уравнение	b. Уравнение, содержащее произведения функций												
3. Применение метода итераций	c. Специальный случай ядра в уравнении Фредгольма												
4. Ядро Грина	d. Для нахождения решений уравнений												
16.		<b>Сопоставьте термины с их определениями:</b> <table><tr><th>Термин</th><th>Определения</th></tr><tr><td>1. Задача</td><td>a. Функции, соответствующие</td></tr></table>	Термин	Определения	1. Задача	a. Функции, соответствующие	УК-1, ПК-2						
Термин	Определения												
1. Задача	a. Функции, соответствующие												

		<table><tr><td>Штурма-Лиувилл я</td><td>собственным значениям</td></tr><tr><td>2. Собственные значения</td><td>b. Значения, при которых уравнение имеет нетривиальное решение</td></tr><tr><td>3. Собственные функции</td><td>c. Оператор второго порядка с заданными граничными условиями</td></tr><tr><td>4. Граничные условия</td><td>d. Условия, задаваемые на границах области определения</td></tr></table>	Штурма-Лиувилл я	собственным значениям	2. Собственные значения	b. Значения, при которых уравнение имеет нетривиальное решение	3. Собственные функции	c. Оператор второго порядка с заданными граничными условиями	4. Граничные условия	d. Условия, задаваемые на границах области определения			
Штурма-Лиувилл я	собственным значениям												
2. Собственные значения	b. Значения, при которых уравнение имеет нетривиальное решение												
3. Собственные функции	c. Оператор второго порядка с заданными граничными условиями												
4. Граничные условия	d. Условия, задаваемые на границах области определения												
17.		<b>Сопоставьте термины с их определениями:</b> <table><tr><th>Термин</th><th>Определения</th></tr><tr><td>1. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром</td><td>a. Уравнение, где ядро не зависит от одной переменной</td></tr><tr><td>2. Уравнение Вольтерра с вырожденным ядром</td><td>b. Уравнение с зависимостью от разности переменных</td></tr><tr><td>3. Ядро в интегральном уравнении</td><td>c. Функция, которая определяет взаимодействие переменных</td></tr><tr><td>4. Существование решений</td><td>d. Условие, при котором интегральное уравнение имеет решение</td></tr></table>	Термин	Определения	1. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	a. Уравнение, где ядро не зависит от одной переменной	2. Уравнение Вольтерра с вырожденным ядром	b. Уравнение с зависимостью от разности переменных	3. Ядро в интегральном уравнении	c. Функция, которая определяет взаимодействие переменных	4. Существование решений	d. Условие, при котором интегральное уравнение имеет решение	УК-1, ПК-2
Термин	Определения												
1. Уравнение Фредгольма с вырожденным ядром	a. Уравнение, где ядро не зависит от одной переменной												
2. Уравнение Вольтерра с вырожденным ядром	b. Уравнение с зависимостью от разности переменных												
3. Ядро в интегральном уравнении	c. Функция, которая определяет взаимодействие переменных												
4. Существование решений	d. Условие, при котором интегральное уравнение имеет решение												
<b>Задания закрытого типа на установление правильной последовательности</b>													
18.		<b>Установите правильную последовательность шагов для решения задачи Штурма–Лиувилля:</b> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Определение собственных значений</li><li>2. Запись уравнения Штурма–Лиувилля</li><li>3. Применение краевых условий</li><li>4. Нахождение собственных функций</li></ol>	УК-1, ПК-2										
19.		<b>Установите правильную последовательность шагов для построения резольвенты уравнения Фредгольма 2-го рода.</b> <ol style="list-style-type: none"><li>1. Определите ядро интегрального уравнения</li><li>2. Примените итерационную схему</li><li>3. Найдите неоднородный член</li><li>4. Получите выражение резольвенты</li></ol>	УК-1, ПК-2										
20.		<b>Установите правильную последовательность характеристик функций, используемых в интегральных</b>	УК-1, ПК-2										

		<b>уравнениях:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Непрерывность</li> <li>2. Ограниченность</li> <li>3. Дифференцируемость</li> <li>4. Интегрируемость</li> </ol>	
21.		<b>Установите правильную последовательность применения метода последовательных приближений:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение начального приближения</li> <li>2. Итерация до достижения сходимости</li> <li>3. Проверка результатов</li> <li>4. Завершение процесса</li> </ol>	УК-1, ПК-2
22.		<b>Установите правильную последовательность шагов при использовании функции Грина для решения задачи:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Определение краевых условий</li> <li>2. Построение функции Грина</li> <li>3. Интеграция с не однородным членом</li> <li>4. Нахождение полного решения</li> </ol>	УК-1, ПК-2
<b>Задания открытого типа на дополнение</b>			
23.	1.	<b>Характеристики функций, используемых в интегральных уравнениях:</b> <ol style="list-style-type: none"> <li>1. Непрерывность: _____.</li> <li>2. Ограниченность: _____.</li> <li>3. Дифференцируемость: _____.</li> <li>4. Интегрируемость: _____.</li> </ol>	УК-1, ПК-2
24.		<b>Что такое функция Грина, и какова её роль в решении задач Штурма–Лиувилля?</b>	УК-1, ПК-2
25.		<b>Интегральные уравнения применяются в математической физике для:</b> Моделирования _____. Решения задач о _____. Определения _____. Оптимизации _____.	УК-1, ПК-2
26.		<b>Запишите метод, о котором идёт речь</b> Итерационный процесс, в котором каждое новое приближение зависит от предыдущего, и оно вычисляется с использованием заданного интегрального уравнения до достижения заданной точности.	УК-1, ПК-2
27.		<b>Запишите задачу, о которой идёт речь</b> Классическая задача в математическом	УК-1, ПК-2

		анализе, состоящая в нахождении собственных значений и собственных функций линейного дифференциального оператора	
<b>Задания открытого типа с развернутым ответом</b>			
28.		<b>Опишите последовательность шагов для построения резольвенты уравнения Фредгольма 2-го рода.</b>	УК-1, ПК-2
29.		<b>Объясните, как можно использовать функцию Грина для решения системы дифференциальных уравнений.</b>	УК-1, ПК-2
30.		<b>Один из методов решения интегральных уравнений с вырожденным ядром — это:</b>	УК-1, ПК-2
31.		<b>Интегральные уравнения могут быть преобразованы в:</b>	УК-1, ПК-2
32.		<b>Условия существования решений интегрального уравнения включают:</b>	УК-1, ПК-2

### **3. Перечень основной и дополнительной учебной литературы, необходимой для освоения дисциплины (модуля)**

#### **3.1. Основная литература:**

1. Денежкина, И. Е. Методические указания к лабораторным работам по дисциплине "Численные методы" / И. Е. Денежкина. - Москва : Финансовая академия, 2004. - 22 с. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/497494> - Режим доступа: по подписке.- Текст: электронный.
2. Пантелеев, А. В. Численные методы. Практикум: учебное пособие / А.В. Пантелеев, И.А. Кудрявцева. - Москва: ИНФРА-М, 2020. - 512 с. -(Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-012333-2. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1028969> - Режим доступа: по подписке.- Текст: электронный.
3. Шевченко, А. С. Лабораторный практикум по численным методам: практикум / А.С. Шевченко. - Москва :ИНФРА-М, 2018. - 199 с. (Высшее образование).- ISBN 978-5-16-106606-5.- URL: <https://znanium.com/catalog/product/966104> – Режим доступа: по подписке.- Текст: электронный.



подписке.- Текст: электронный.

### 3.2. Дополнительная литература:

1. Е.В. Сумин, В.Б. Шерстюков, О.В. Шерстюкова Интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра, краевые задачи и методы их решения: Учебно-методическое пособие.-М.: НИЯУ МИФИ, 2016.-96 с.- ISBN 978-5-7262-2282-0
2. Жукова, Г. С. Дифференциальные уравнения : учебник / Г. С. Жукова. - Москва: ИНФРА-М, 2020. - 504 с. - ( Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015970-6. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1072180> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.
3. Жукова, Г. С. Дифференциальные уравнения в примерах и задачах: учебное пособие / Г. С. Жукова. - Москва: ИНФРА-М, 2021. - 348 с. - ( Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015971-3. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1072182> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.
4. Коган, Е. А. Обыкновенные дифференциальные уравнения и вариационное исчисление: учебное пособие / Е. А. Коган. - Москва: ИНФРА-М, 2020. - 293 с. - ( Высшее образование: Бакалавриат). - ISBN 978-5-16-015817-4. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1058922> – Режим доступа: по подписке. - Текст: электронный.
5. Ледовская, Е. В. Решение дифференциальных уравнений I порядка и некоторых видов дифференциальных уравнений старшего порядка : методические указания к типовому расчету / Е. В. Ледовская, Н. Б. Махова. - Москва: МГАВТ, 2007. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/401063> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.
6. Литвин, Д. Б. Обыкновенные дифференциальные уравнения и системы: учебное пособие / Д. Б.Литвин , С.В. Мелешко , И.И. Мамаев . - Ставрополь: Сервисшкола, 2017. - 76 с. - ISBN. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/976476> – Режим доступа: по подписке– Текст: электронный.
7. Осадчий, Ю. М. Дифференциальные уравнения: учебное пособие / Ю.М. Осадчий. - Москва: ИНФРА-М, 2019. - 157 с. - ISBN 978-5-16-107965-2. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1039633> – Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.
8. Пантелеев, А. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. Практикум: Учебное пособие / А. В.Пантелеев, А. С. Якимова, К. А.

Рыбаков. - Москва : ИНФРА-М, 2019. - 432 с. ( Высшее образование: Бакалавриат) ISBN 978-5-16-011973-1. - URL: <https://znanium.com/catalog/product/1010761>

– Режим доступа: по подписке. – Текст: электронный.

9. Гриняев Ю.В. Методы математической физики : учебное пособие / Ю. В. Гриняев, Л. Л. Миньков, С. В. Тимченко, В. М. Ушаков. — Томск : Эль Контент, 2012. — 148 с.- ISBN 978-5-4332-0055-5